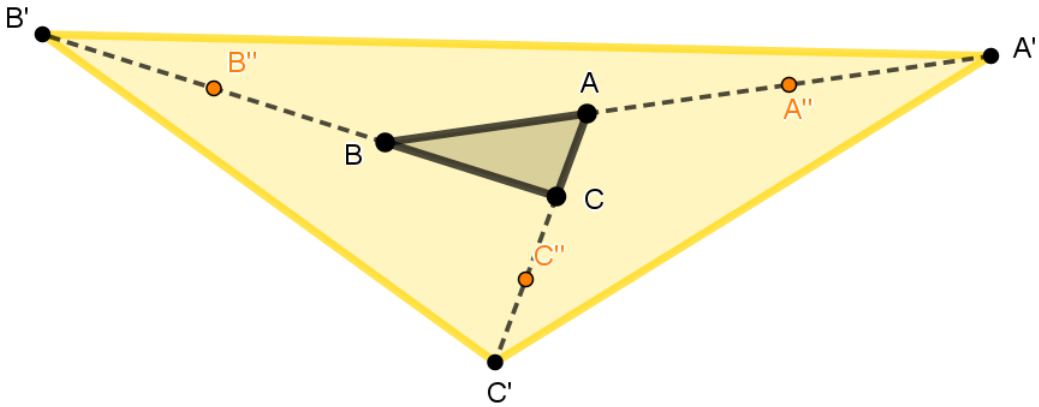
Fachhochschule Nordwestschweiz
Hochschule für Technik

Lösungen zur Musteraufgabe des Flyers

Mathematik- und Logikspiele 2026

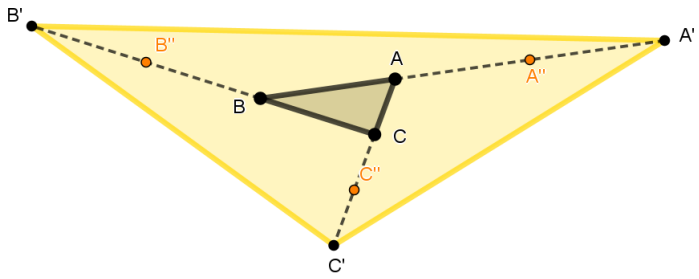
Roger Burkhardt

7. November 2025



1 Aufgabe

1.1 Der Dreiecksvergleich



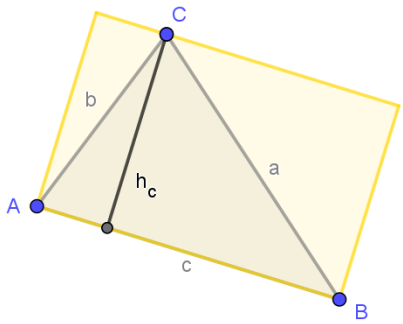
Ausgehend von einem Dreieck ABC wird das Dreieck $A'B'C'$ wie folgt konstruiert:

- A' liegt auf der Halbgeraden BA, sodass $A'A = 2AB$ gilt,
- B' liegt auf der Halbgeraden CB, sodass $B'B = 2BC$ gilt,
- C' liegt auf der Halbgeraden AC, sodass $C'C = 2CA$ gilt.

Wie verhält sich die Fläche des Dreiecks $A'B'C'$ zur Fläche des Dreiecks ABC?

2 Lösung

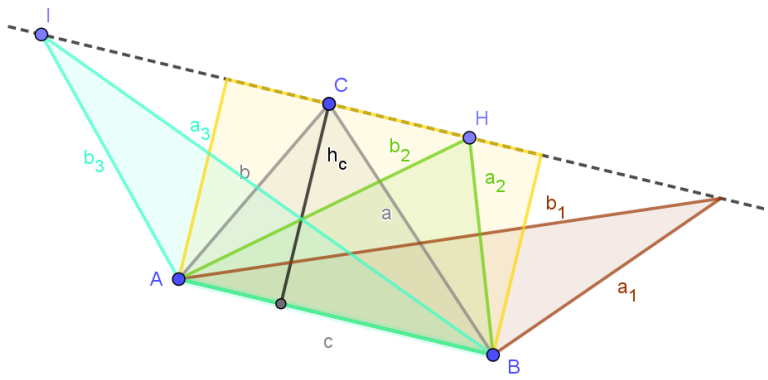
Es gibt verschiedene Möglichkeiten die Fläche eines Dreiecks zu berechnen. Eine Methode **Grundlinie mal Höhe durch zwei** ist wohl den meisten bekannt (die Fläche des Dreiecks ist halb so gross wie die Rechtecksfläche mit der gleichen Grundlinie und Höhe):



Für die Fläche des Dreiecks ABC gilt somit (h_a ist die Höhe des Dreiecks über der Seite a, analog für h_b und h_c):

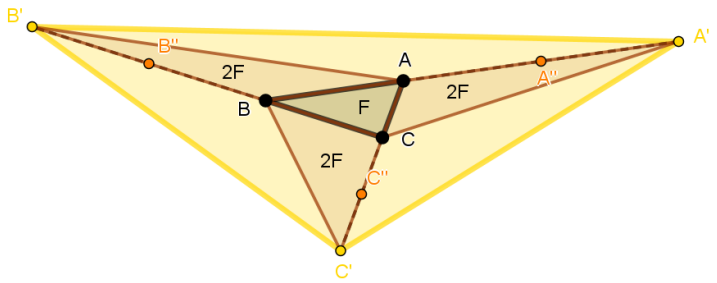
$$F = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

Im weiteren benutzen wir die folgende Tatsache: Wird in der obigen Figur der Eckpunkt C auf einer Parallelen zu der Grundlinie verschoben, ändert sich der Wert der Fläche nicht (da die Höhe (und auch die Grundlinie) gleich bleibt):

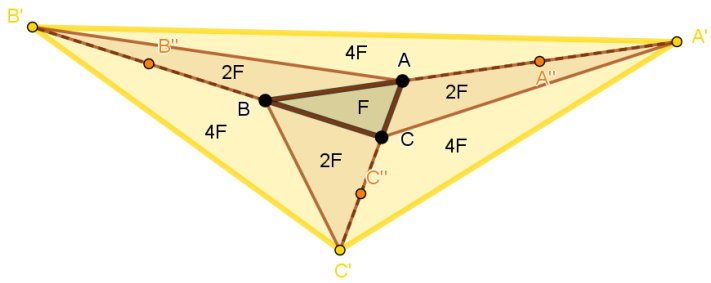


Nun zur eigentlichen Lösung der Aufgabe. Vom grossen Dreieck $A'B'C'$ kennen wir die Grundlinie und die Höhe nicht. Daher bestimmen wir die Fläche des grossen Dreiecks als Summe von Flächen von Teildreiecken.

Betrachten wir zuerst die drei braunen Dreiecke ABB', BCC' und CAA', so ist bei diesen Dreiecken die Grundlinie (die konstruierte Seite z.B. BB' beim Dreieck ABB') jeweils doppelt so lang wie die Grundlinie beim ursprünglichen Dreieck wobei die Höhe gleich bleibt. Jedes der braunen Dreiecke hat somit die doppelte Fläche wie diejenige des ursprünglichen Dreiecks:



Die drei verbleibenden Dreiecke $AA'B'$, $BB'C'$ und $CC'A'$ haben jeweils die gleichen Höhen wie die braunen Dreiecke aber die Grundlinie ist doppelt so lang. Damit sind diese Flächen doppelt so gross wie diejenigen der braunen Dreiecke und somit viermal so gross wie die Fläche des ursprünglichen Dreiecks:



Die Gesamtfläche ergibt sich nun als Summe der Fläche des ursprünglichen Dreiecks (F) den Flächen der drei braunen Dreiecke ($3 \cdot 2F$) und den Flächen der drei (gelben) äusseren Dreiecke ($3 \cdot 4F$) zu:

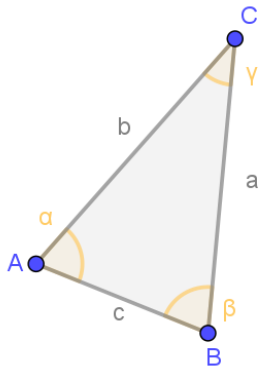
$$F_{\text{gross}} = F + 3 \cdot 2F + 3 \cdot 4F = 19F$$

Das gesuchte Flächenverhältnis ist daher gleich 19.

2.1 Weitere Möglichkeiten für die Berechnung einer Dreiecksfläche

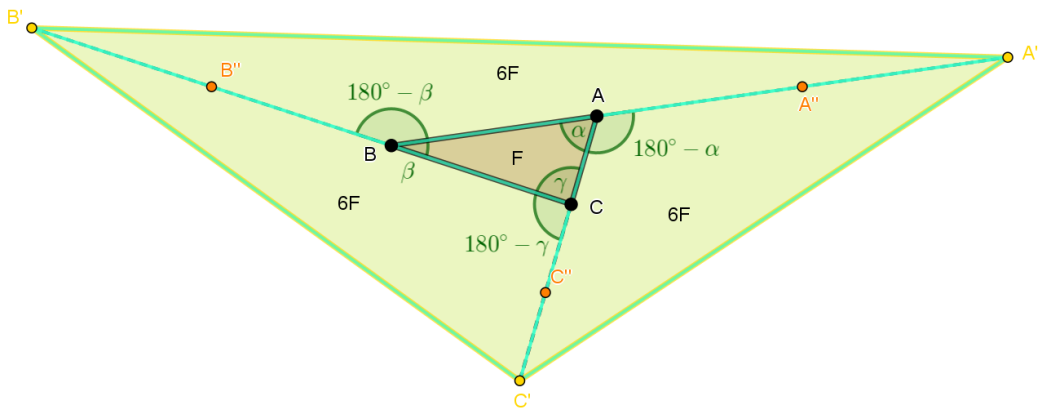
2.1.1 Mittels Trigonometrie

Mit Hilfe der Trigonometrie lässt sich die Fläche eines Dreiecks auch mit der folgenden Formel berechnen:



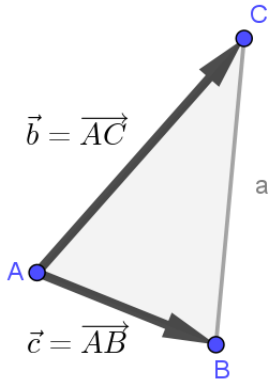
$$F = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) = \frac{1}{2}ca\sin(\beta)$$

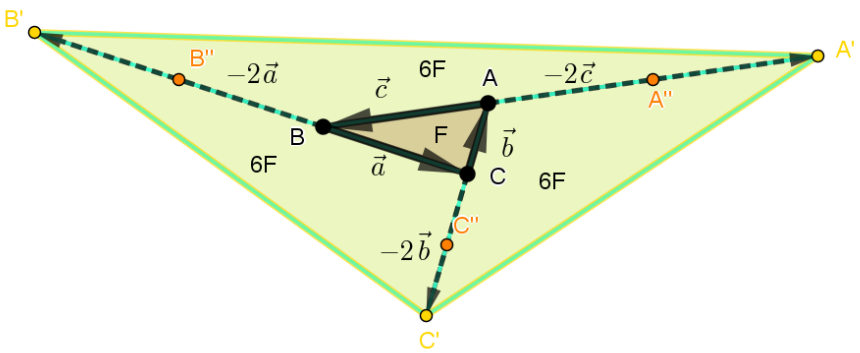
Basierend auf den drei äusseren Dreiecken $AA'C'$, $BB'A'$ und $CC'B'$ ergeben sich mit den Nebenwinkeln und den zwei- bzw. dreifachen Seitenlängen die entsprechenden sechsfachen Flächen und am Schluss das gleiche Resultat wie bei der ersten Lösungsvariante (wobei die Beziehung $\sin(x) = \sin(180° - x)$ benutzt werden kann)!



2.1.2 Mit Hilfe von Vektoren

Eine weitere Möglichkeit die Fläche eines Dreiecks zu bestimmen basiert auf dem Vektorprodukt:



$$F = \frac{1}{2}\left|\vec{b} \times \vec{c}\right|$$

Wählt man neben dem ursprünglichen Dreieck ABC nun noch die drei grossen äusseren Dreiecke aus, so erkennt man, dass die Seitenvektoren doppelt bzw. dreimal solang sind wie die Seitenvektoren des ursprünglichen Dreiecks. Daher haben diese grossen äusseren Dreiecke den sechsfachen Flächeninhalt.