Fachhochschule Nordwestschweiz
Hochschule für Technik

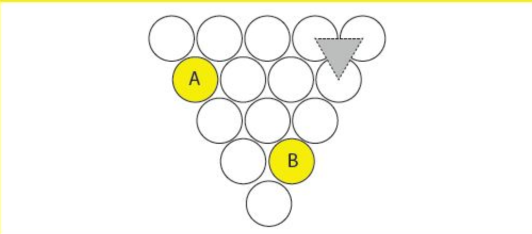
Lösungen zu den Musteraufgaben des Flyers

Mathematik- und Logikspiele 2021

Roger Burkhardt

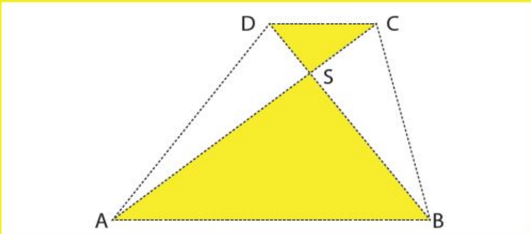
10. September 2020

Viel Spass beim Knobeln!



Trauben
Jede der abgebildeten Trauben kann eine von drei Qualitätsstufen haben: A, B oder C. Wenn drei Trauben sich paarweise berühren bilden sie ein kleines Dreieck (siehe Figur). In jedem dieser Dreiecke sind entweder alle drei Qualitäten gleich oder alle voneinander verschieden.

Vervollständigen Sie die Qualitäten aller Trauben im Bild, indem Sie in jeden leeren Kreis A, B oder C einsetzen.

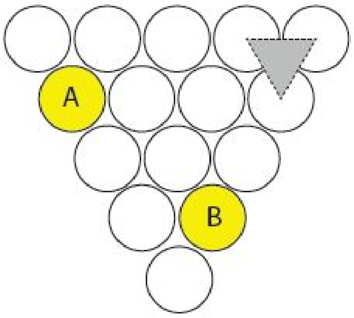


Baumschule
In einer Baumschule sind fünf Bäume A, B, C, D und S wie folgt gepflanzt: - die Geraden AB und CD sind parallel, - die Geraden AC und BD schneiden sich in S. Die Flächen der Dreiecke ABS und CDS sind 50 sowie 32 Aren.

Was ist die Fläche des Trapezes ABCD (in Aren)?

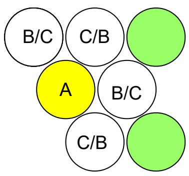
1 Trauben

Jede der abgebildeten Trauben kann eine von drei Qualitätsstufen haben: A, B oder C. Wenn drei Trauben sich paarweise berühren bilden sie ein kleines Dreieck (siehe Figur). In jedem dieser Dreiecke sind entweder alle drei Qualitäten gleich oder alle voneinander verschieden.
Vervollständigen Sie die Qualitäten aller Trauben im Bild, indem Sie in jeden leeren Kreis A, B oder C einsetzen.

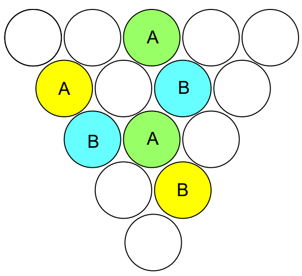


1.1 Lösung

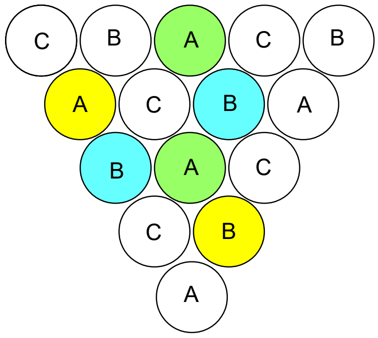
Da in der Grafik schon zwei Trauben mit unterschiedlichen Qualitäten vorgegeben sind, können nirgends zwei (oder mehr) benachbarte Trauben die gleiche Qualität aufweisen (sobald zwei benachbarte Trauben die gleiche Qualität haben, müssen automatisch alle abgebildeten Trauben die gleiche Qualität haben)!
Für die Lösung startet man bei einer Traube mit gegebener Qualität, z.B. bei der Traube mit Qualität A. Zwei benachbarte Trauben, welche an der Traube mit Qualität A anliegen, dürfen nun nicht die Qualität A aufweisen und müssen sich zudem in den Qualitäten unterscheiden - also die Qualitäten B und C haben:



Ob jeweils die Qualität B oder C vorliegt, kann man nicht direkt wissen! Doch aus der im obigen Bild gegebenen Situation, müssen die grün hinterlegten Trauben sicher die Qualität A aufweisen (da diese an Trauben mit den Qualitäten B und C anstossen). Die gleichen Schlüsse ergeben sich aus der mit der Qualität B gegebenen Traube (hellblaue Felder):



Nun lassen sich die Qualitäten der restlichen Trauben einfach bestimmen:

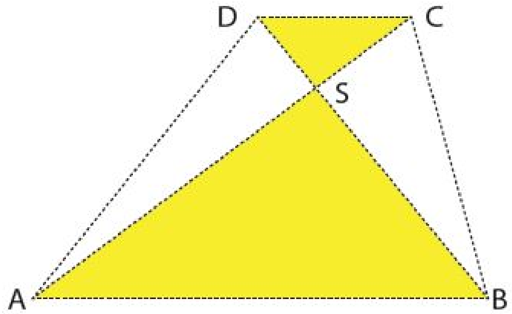


2 Baumschule

In einer Baumschule sind fünf Bäume A, B, C, D und S wie folgt gepflanzt:

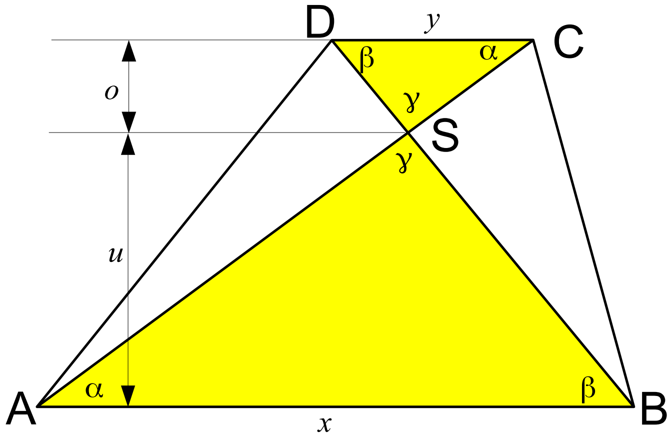
- die Geraden AB und CD sind parallel,
- die Geraden AC und BD schneiden sich in S.
- die Flächen der Dreiecke ABS und CDS sind 50 sowie 32 Aren.

Was ist die Fläche des Trapezes ABCD (in Aren)?



2.1 Lösung

Die beiden gelb hinterlegten Dreiecke sind ähnlich (gleiche Form aber unterschiedliche Grösse). Dies erkennt man an den Innenwinkeln, welche übereinstimmen:



In ähnlichen Dreiecken gilt der Strahlensatz (das Verhältnis sich entsprechender Seiten ist konstant). Es gilt mit den obigen Bezeichnungen:

$$\frac{y}{x} = \frac{o}{u} = k = konst.$$

Zudem sind die Flächen der beiden Dreiecke bekannt, was zu den folgenden beiden Beziehungen führt:

$$\begin{aligned} \frac{o \cdot y}{2} &= 32 \\ \frac{u \cdot x}{2} &= 50 \end{aligned}$$

Bildet man das Flächenverhältnis kann der Wert für die Konstante berechnet werden:

$$\frac{32}{50} = \frac{\frac{o\cdot y}{2}}{\frac{u\cdot x}{2}} = \frac{o\cdot y}{u\cdot x} = \frac{o}{u}\cdot\frac{y}{x} = k^2$$

Bemerkung: Diese Beziehung ist eine Erweiterung des Strahlensatzes. Ist das Seitenverhältnis in ähnlichen Dreiecken gleich k, so ist das Flächenverhältnis gleich k^2.
In der Aufgabe wird die Trapezfläche gesucht. Diese berechnet sich mit der Formel: mittlere Breite mal Höhe. Also:

$$F_{Trapez} = \frac{x+y}{2}\cdot(u+o)$$

Multipliziert man obige Formel aus, so erhält man:

$$F_{Trapez} = \underbrace{\frac{x\cdot u}{2}}_{=50} + \frac{x\cdot o}{2} + \frac{y\cdot u}{2} + \underbrace{\frac{y\cdot 0}{2}}_{=32}$$

Dabei sind der erste und der letzte Summand jeweils gleich den gegebenen Dreiecksflächen. Für die mittleren beiden Summanden findet man mit dem Strahlensatz ($o = k\cdot u$ und $y = k\cdot x$):

$$\begin{aligned}\frac{x\cdot o}{2} &= \frac{x\cdot k\cdot u}{2} = k\underbrace{\frac{x\cdot u}{2}}_{=50} = k\cdot 50\\ \frac{y\cdot u}{2} &= \frac{k\cdot x\cdot u}{2} = k\underbrace{\frac{x\cdot u}{2}}_{=50} = k\cdot 50\end{aligned}$$

In der Flächenformel eingesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned}F_{Trapez} &= \underbrace{\frac{x\cdot u}{2}}_{=50} + \underbrace{\frac{x\cdot o}{2}}_{=k\cdot 50} + \underbrace{\frac{y\cdot u}{2}}_{=k\cdot 50} + \underbrace{\frac{y\cdot 0}{2}}_{=32}\\ &= 50 + 2k\cdot 50 + 32 = 50 + 2\sqrt{\frac{32}{50}}\cdot 50 + 32 = 50 + 2\sqrt{32\cdot 50} + 32 = 50 + 80 + 32 = 162\end{aligned}$$

Die Fläche des Trapezes beträgt somit 162 Aren.