Fachhochschule Nordwestschweiz
Hochschule für Technik

Lösungen zu den Musteraufgaben des Flyers

Mathematik- und Logikspiele 2023

Roger Burkhardt

16. September 2022

Fachhochschule
Nordwestschweiz

Viel Spass beim Knobeln!

Schwarzes Quadrat

Auf ein schwarzes Quadrat klebt man zwei gelbe Streifen die dreimal so lang wie breit sind. Die Ränder dieser rechteckigen Streifen liegen parallel zu den Quadratdiagonalen und ihre Ecken liegen auf dem Quadratrand. Sie bilden ein gelbes Kreuz und die Fläche des schwarzen sichtbaren Hintergrunds misst 18 cm^2. Wie gross ist die schwarze Fläche zu Beginn?

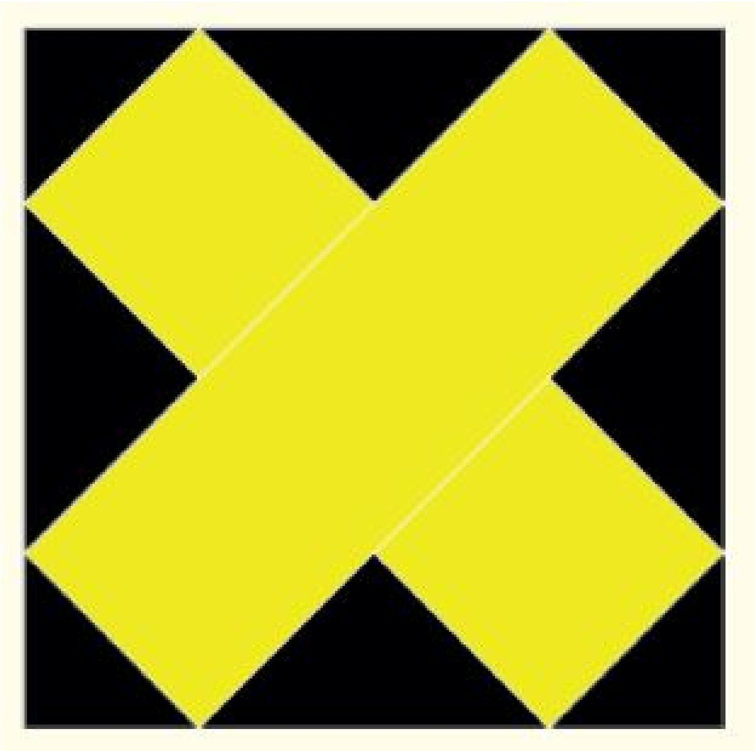
Die Stoppuhr

Gunvors Stoppuhr hat eine Digitalanzeige, auf welcher jede Ziffer aus einer gewissen Anzahl leuchtender Balken besteht (sechs bei der 0, zwei bei der 1, fünf bei der zwei, etc.). Wie viele Male zwischen 00 und 59 Sekunden ist die Anzahl aufleuchtender Balken gleich der Summe der beiden angezeigten Ziffern?

Lösungen und alle Infos unter **www.fhnw.ch/mathe-logik-spiele**

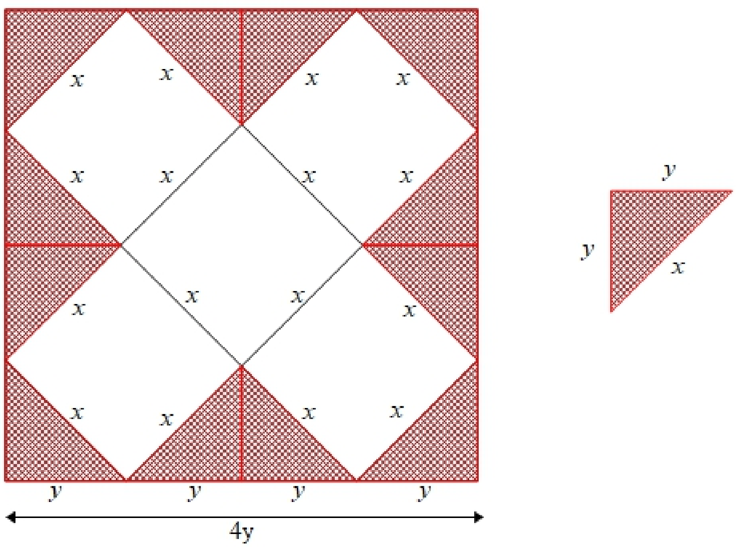
1 Schwarzes Quadrat

Auf ein schwarzes Quadrat klebt man zwei gelbe Streifen die dreimal so lang wie breit sind. Die Ränder dieser rechteckigen Streifen liegen parallel zu den Quadratdiagonalen und ihre Ecken liegen auf dem Quadratrand. Sie bilden ein gelbes Kreuz und die Fläche des schwarzen sichtbaren Hintergrunds misst $18\,cm^2$. Wie gross ist die schwarze Fläche zu Beginn?



1.1 Lösung

Die im Bild sichtbare schwarze Fläche $A_1 = 18\,cm^2$ lässt sich in 12 kongruente (deckungsgleiche) Dreiecke zerlegen, welche rechtwinklig und gleichschenklig sind:



Ein solches Dreieck hat dann die Fläche $A_{Dreieck} = \frac{A_1}{12} = 1.5\,cm^2$. Nun lassen sich die Kathetenlänge y und Hypotenusenlänge x dieser Dreiecke berechnen. Die Dreiecke sind halbe Quadrate mit Seitenlänge y:

$$\begin{aligned} A_{Quadrat} &= 2 \cdot A_{Dreieck} = 3\,cm^2 \\ y^2 &= 3\,cm^2 \\ y &= \sqrt{3}\,cm \end{aligned}$$

Mittels Pythagoras findet man für die Hypotenusenlängen x:

$$\begin{aligned} x^2 &= y^2 + y^2 \\ x^2 &= 2 \cdot y^2 \\ x &= \sqrt{2}y \\ x &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}\,cm = \sqrt{6}\,cm \end{aligned}$$

Nun hat das grosse Quadrat die Seitenlänge $s = 4y = 4\sqrt{3}\,cm$ und die anfängliche schwarze Fläche beträgt somit:

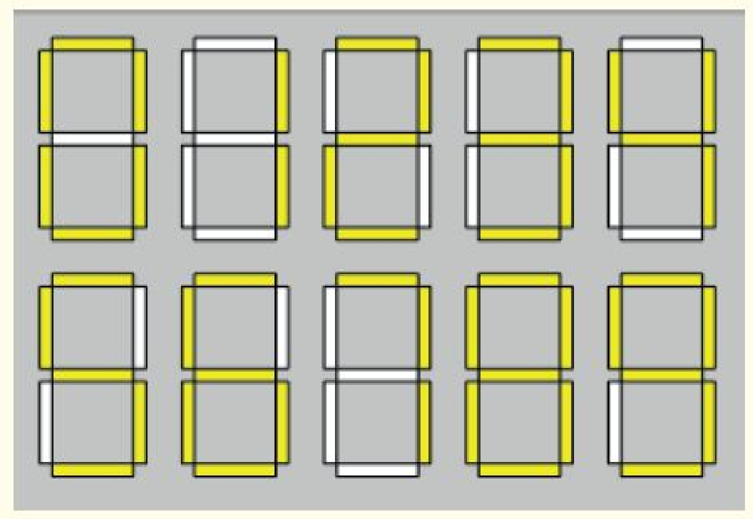
$$A_{schwarz} = (4y)^2 = 16 \cdot y^2 = 16 \cdot \left(\sqrt{3}\,cm\right)^2 = 16 \cdot 3\,cm^2 = 48\,cm^2$$

Noch schneller erhält man dieses Resultat, wenn man die durch die Streifen bedeckte Fläche ebenfalls in diese kongruenten Dreiecke zerlegt (ein weisses Quadrat in der Skizze enthält 4 solche Dreiecke - bei 5 solchen Quadraten ergeben sich 20 Dreiecke für die Streifen - gesamthaft also $12 + 20 = 32$ Dreiecke):

$$A_{schwarz} = 32 \cdot A_{Dreieck} = 32 \cdot 1.5\,cm^2 = 48\,cm^2$$

2 Die Stoppuhr

Gunvors Stoppuhr hat eine Digitalanzeige, auf welcher jede Ziffer aus einer gewissen Anzahl leuchtender Balken besteht (sechs bei der 0, zwei bei der 1, fünf bei der zwei, etc.). Wie viele Male zwischen 00 und 59 Sekunden ist die Anzahl aufleuchtender Balken gleich der Summe der beiden angezeigten Ziffern?



2.1 Lösung

Hier könnte man für alle 60 möglichen Anzeigen die Anzahl Balken (n_B) zählen und mit der Summe der angezeigten Ziffern (s_Z) vergleichen und so die Anzahl der Übereinstimmungen herausfinden:

Anzeige	n_B	s_Z	Übereinstimmung
00	$6+6=12$	$0+0=0$	nein
01	$6+2=8$	$0+1=1$	nein
02	$6+5=11$	$0+2=2$	nein
03	$6+5=11$	$0+3=3$	nein
⋮	⋮	⋮	⋮
18	$2+7=9$	$1+8=9$	ja
⋮	⋮	⋮	⋮
59	$5+6=11$	$5+9=14$	nein

Mit diesem Vorgehen kann man die Lösung natürlich finden, es ist aber sehr mühsam (und neben dem grossen Zeitaufwand auch noch fehleranfällig!).

Ein deutlich einfacheres und schnelleres Verfahren basiert auf den Differenzen zwischen Anzahl Balken und Wert einer Ziffer:

Ziffer	Anzahl Balken	Differenz	Ziffer	Anzahl Balken	Differenz
0	6	-6	5	5	0
1	2	-1	6	6	0
2	5	-3	7	3	4
3	5	-2	8	7	1
4	4	0	9	6	3

Wenn nun die Differenz zwischen der Anzahl Balken und dem Wert der Ziffer gleich Null ist (Ziffern 4, 5 und 6) ergeben sich auch für Anzeigen mit diesen Ziffern keine Abweichungen (z.B. 44, 45, 46, ...). Im weiteren sind auch alle Anzeigen wo die Summe der Differenz Null ergibt Lösungen für unser Problem (z.B. Anzeige 18 (Summe der Differenzen $(-1) + (1) = 0$)). Somit sind die folgenden Anzeigen korrekt:

$$18, 29, 44, 45, 46, 54, 55, 56$$

Gesamthaft stimmt die Anzahl der angezeigten Balken mit der Summe der Ziffern bei 8 Anzeigen überein!