Hinweise für die mündliche Prüfung

Formale Bedingungen

Die mündliche Prüfung in Mathematik dauert fünfzehn Minuten. Sie besteht aus drei Teilen, in jedem sind sechs Punkte möglich. Es wird eine Vorbereitungszeit von 15 Minuten gewährt, in denen die ersten beiden Teile bearbeitet werden können unter Nutzung eines Taschenrechners und einer Formelsammlung gemäss dem Beiblatt zu den erlaubten Hilfsmitteln. Fragen zum dritten Teil werden erst in der Prüfung gegeben, für ihre Bearbeitung sind keine Hilfsmittel (auch kein Papier und Stift) erlaubt.

Anforderungen

Die drei Teile sind von folgendem Anforderungstyp:

1. **Beweisen, Herleiten, Definieren.** Im ersten Teil wird das Verständnis der theoretischen Begrifflichkeiten und Zusammenhänge getestet. Beispielsweise ist ein Beweis zu führen, eine Formel herzuleiten oder eine Definition zu motivieren. Es ist eine zielgerichtete Vorbereitung auf diesen Teil möglich, da ein Thema aus der Liste des Abschnitts „Teil eins“(vgl. unten) gezogen wird.

   Diesen Teil können Sie in der Vorbereitungszeit vorbereiten.

2. **Erklären und Diskutieren.** Im zweiten Teil wird eine Problemstellung vorgelegt, die Sie in der Vorbereitungszeit bearbeiten können. In der Prüfung erklären Sie das Vorgehen, begründen die Korrektheit des Vorgehens (was zentral für die Bewertung ist) und warum sich das Vorgehen eignet.

   Diesen Teil können Sie in der Vorbereitungszeit vorbereiten.

3. **Flexibles Rechnen.** Im dritten Teil werden die mentalen, sofort abrufbaren Denk- und Rechenfertigkeiten getestet. Beispielsweise sind arithmetische Ausdrücke sofort zu berechnen oder Terme geeignet zu strukturieren.

   Die Fragen dieses Teils werden Ihnen erst in der mündlichen Prüfung vorgelegt.

Im Folgenden wird der erste Teil umschrieben, es werden zwei Beispiele für den zweiten Teil gegeben und schliesslich wird der dritte Teil vorgestellt.

Teil eins

Im ersten Teil der mündlichen Prüfung erklären und begründen Sie mathematische Sachverhalte oder führen einen Beweis. Nachfolgend finden Sie die Liste der erforderlichen Kenntnisse. Genau die gelisteten Fragen werden gestellt. Es ist möglich für die mündliche Prüfung fünf der 15 Themen abzuwählen. Diese werden dann in der mündlichen Prüfung nicht geprüft.
Wir erwarten, dass Sie die gelisteten Fragen spontan, fachlich korrekt und gut nachvollziehbar beantworten können. Bereiten Sie sich auf die mündliche Prüng entsprechend vor.

1 Allgemeine Funktionen: Grundlagen

- Was ist eine Funktion, eine Wertetabelle, ein Graph?
- Was ist ein Definitionsbereich, ein Wertebereich?
- Wie kann ich an Funktionsgraphen Werte ablesen und Fragen beantworten wie „Wo ist der Wert ...“ und „Wieviel ist der Wert an der Stelle ...“?

2 Allgemeine Funktionen: Graphen und Werte

- Skizzieren Sie die grundlegenden Graphen und erklären Sie deren Verlauf (Geraden, Parabeln, Potenzfunktionen, Wurzelfunktionen, Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen, trigonometrische Funktionen).
- Umschreiben Sie den Definitionsbereich grundlegender Funktionen, nennen und erklären Sie spezielle Funktionswerte (Geraden, Parabeln, Potenzfunktionen, Wurzelfunktionen, trigonometrische Funktionen, Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen).
- Wie kann man Definitions- und Wertebereich am Graphen sehen? Erklären Sie dies an sinnvollen Beispielen.

3 Allgemeine Funktionen: Manipulationen

- Was ist der Einfluss von a bei der Funktion $a \cdot f(x)$? Erklären und Begründen Sie.
- Was ist der Einfluss von c bei der Funktion $f(x) + c$? Erklären und Begründen Sie.
- Wie kann man Funktionsgraphen an der x-Achse und der y-Achse spiegeln? Erklären und Begründen Sie.

4 Geometrie: Pythagoras

- Beweisen Sie den Satz von Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$.
- Leiten Sie her: Die Formel für die Raumdiagonale im Würfel: $d = a\sqrt{3}$.

– Leiten Sie her: Die Formel für die Höhe im gleichseitigen Dreieck: $h = \frac{1}{2}s \cdot \sqrt{3}$. Die Formel für den Flächeninhalt im gleichseitigen Dreieck: $A = \frac{1}{4}s^2 \cdot \sqrt{3}$.

5 Lineare Funktionen

– Erklären Sie den Begriff der Steigung und des y-Achsenabschnitts.

– Erklären Sie die Bedeutung des Steigungsdreiecks einer linearen Funktion.

– Erklären Sie, wie man eine lineare Funktion graphisch darstellen kann, ohne einzelne Punkte auf dem Graphen zu berechnen.

6 Lineare Gleichungssysteme

– Wie kann ich Gleichungssysteme rechnerisch lösen? Welche Methoden eignen sich bei welchen Gleichungssystemen? Warum?

– Wie kann ich Gleichungssysteme graphisch lösen? Was sind Vor- und Nachteile dieser Methode? Warum?

– Wann hat ein lineares Gleichungssystem genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen? Wie kann ich dies graphisch interpretieren?

7 Grundlagen: Trigonometrie

– Definieren Sie die trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis. Erklären Sie deren Verlauf insbesondere deren Periodizität.

– Leiten Sie her: $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ und den trigonometrischen Pythagoras.

– Zeigen Sie, wie man am Einheitskreis Werte für $\tan(\alpha)$, $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ ablesen kann.

8 Trigonometrie: Sinus- und Cosinussatz

– Leiten Sie den Sinussatz her.

– Erklären Sie die Anwendung des Cosinussatzes, schreiben Sie ihn insbesondere für alle typischen Anwendungssituationen auf.

– Zeigen Sie, dass der Satz von Pythagoras ein Spezialfall des Cosinussatzes ist.

9 Kombinatorik: Grundlagen

– Erklären Sie die Produktregel an einfachen Beispielen.

– Erklären Sie Eigenschaften, Definition und Anwendung von Fakultäten an einfachen Beispielen.

– Erklären Sie Definition und Anwendung von Binomialkoeffizienten an einfachen Beispielen.

10 Wahrscheinlichkeitsrechnung: Verteilungen

- Charakterisieren Sie Situationen, die zur Binomialverteilung bzw. zur hypergeometrischen Verteilung führen.
- Leiten Sie die Binomialverteilung sowie die hypergeometrische Verteilung her. Nutzen Sie dazu je ein einfaches Beispiel.
- Erklären Sie die Anwendung der Tabelle der Binomialverteilung.

11 Statistik

- Schreiben Sie die Formel für den Mittelwert aus dem Kopf auf und erklären Sie sie.
- Schreiben Sie die Formel für die Varianz aus dem Kopf auf und erklären Sie sie.
- Vergleichen Sie den Range, den Median, den Mittelwert und die Varianz miteinander.

12 Potenzen und Potenzgesetze

- Erklären Sie, welche Potenzgesetze es gibt und wie man sie plausibel machen kann.
- Erklären Sie, wie negative Exponenten definiert sind und warum gerade so.
- Erklären Sie den Spezialfall $a^0 = 1$ für $a \neq 0$. Warum ist das gerade so definiert?

13 Potenzfunktionen und Potengleichungen

- Skizzieren Sie typische Graphen der Potenzfunktion $f(x) = x^n$ und erklären Sie den Unterschied für gerade und ungerade n.
- Erklären Sie, wie man bei einem Graphen einer Potenzfunktion $f(x) = x^n$ beweisen und einsehen kann, ob er achsen- oder punktsymmetrisch ist.
- Erklären Sie die graphische Interpretation der Potenzgleichung $x^n = a$.

14 Quadratisches und Potenzfunktionen

- Erklären Sie, wie man Parabeln der Form $y = a \cdot (x - u)^2 + v$ skizzieren kann, ohne einzelne Punkte der Parabel bestimmen zu müssen.
- Interpretieren Sie die Anzahl Lösungen von quadratischen Gleichungen anhand der Lösungsformel quadratischer Gleichungen und anhand der zugehörigen Parabel.
- Erklären Sie, wie man die Spezialfälle von quadratischen Gleichungen effizient löst: $ax^2 + bx = 0$, $ax^2 + c = 0$.

15 Exponential- und Logarithmusfunktionen

- Erklären Sie Definition und Bedeutung des Logarithmus einer Zahl.
- Erklären Sie Unterschiede und Gemeinsamkeiten von Graphen verschiedener Exponentialfunktionen.
- Erklären Sie Ansatz und Bedeutung der exponentiellen Wachstumsgleichung sowie der Halbwertszeit.

Teil zwei, erstes Beispiel

Beweisen oder widerlegen Sie die jeweilige Aussage.

1. Jedes Rechteck ist ein Parallelogramm.
2. Jedes Parallelogramm ist spiegelsymmetrisch.
3. Verdoppelt man alle Kanten eines Quaders, so verdoppelt sich auch der Inhalt seiner Oberfläche.

Lösungsvorstellung

Wir erwarten, dass Sie mathematisch in elementaren Inhaltsbereichen argumentieren und zwischen dem Beweis einer Aussage und ihrer Widerlegung unterscheiden können.

Zur Bearbeitung der Teilaufgabe 1 müssen Sie wissen, wie ein Rechteck und ein Parallelogramm definiert sind, dass es bei der Benennung von ebenen Figuren um die Anwendung dieser Definitionen geht und dass mit Ober- und Unterbegriffen Inklusionen gemeint sind.

Zur Bearbeitung der Teilaufgabe 2 ist es notwendig, dass Sie ebene Figuren spiegeln können. Sie können Figuren mit Zirkel und Lineal spiegeln, Sie schaffen das bei einfachen Figuren aber auch mental und können die Spiegelung daher ad hoc skizzieren.

Bei der Teilaufgabe 3 sind viele Argumentationsweisen vorstellbar. Wichtig ist, dass Sie argumentieren und nicht einfach behaupten.

Teil zwei, zweites Beispiel

Unten sind zwei Lösungswege zur Lösung der Gleichung $(x-1)(x-2) = x-1$ gegeben. Beide Lösungswege sind korrekt.

1. Lösungsweg 1 verwendet die Lösungsformel für quadratische Gleichungen. Diese Formel ist wichtig. Erläutern Sie kurz, wie Sie diese Formel herleiten würden.

2. Begründen Sie die Korrektheit von jedem einzelnen Schritt in Lösungsweg 2.

3. Umschreiben Sie in groben Schritten die Strategie von Lösungsweg 1 und jene von Lösungsweg 2. Erläutern Sie zudem den Anwendungsbereich dieser Strategien.

Lösungsweg 1	Lösungsweg 2
$(x-1)(x-2) = x-1$ | Ausmultiplizieren	$(x-1)(x-2) = x-1$
$x^2-3x+2 = x-1$ | quadr. Gleichung alles auf eine Seite	$x-1=0$ oder $x-2 = 1$
$x^2-4x+3 = 0$ | Lösungsformel	
$x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$	
$x_1 = 3,\ x_2 = 1$	$x_1 = 3,\ x_2 = 1$

Lösungsvorstellung

Wir erwarten, dass Sie Gleichungen nicht nur lösen sondern auch begründen können, warum das, was Sie machen, korrekt ist und sich im jeweiligen Fall auch eignet.

Bei Teilaufgabe 1 ist uns wichtig, dass Sie die Beweisidee von zentralen Aussagen der Schulmathematik kennen. In diesem Fall würde uns der Hinweis auf das quadratische Ergänzen reichen.

Die Bearbeitung von Teilaufgabe 2 bedingt, dass Sie Gleichungen nicht blindlings lösen, sondern über Gleichungen nachdenken und sich klar machen können, was da steht. In diesem Fall müssen Sie beispielsweise über das beidseitige Dividieren sprechen können und über die Voraussetzungen unter denen das erlaubt ist.

Teilaufgabe 3 verlangt, dass Sie in Lösungswegen Strategien erkennen und diese in groben Schritten beschreiben können. Sie sollten zudem aufzeigen können, in welchen Fällen eine Strategie effizient ist und in welchen eher nicht.

Teil drei

Es wird erwartet, dass Sie sattelfest im Kopfrechnen sind, sowohl bei der Verwendung von Standardverfahren, bei der Abfrage von Fakten als auch beim flexiblen Rechnen, also bei der Nutzung effizienter Alternativen zu den Standardverfahren. Wir legen Ihnen im dritten Teil mehrere Aufgaben nacheinander vor. Sie haben jeweils zehn Sekunden Zeit, uns das Resultat zu nennen. Sie dürfen keinerlei Hilfsmittel nutzen. Nachstehend sind ein paar Beispiele solcher Aufgaben vorgelegt.

1. $42 \cdot 17 - 22 \cdot 17$
2. $288 : 9$
3. $427 + 396 - 427$
4. 1.5^2
5. $4 : \frac{1}{37}$
6. Wie viel sind 60% von 140?
7. $\cos \pi$
8. $88 + 89 + 90 + 91 + 92$
9. $\sqrt[3]{64}$
10. $\log_{10} 0.01$
11. $1013 - 898$

Lösungsvorstellung

1. Sie erkennen sofort, dass dies auf $20 \cdot 17$ führt, das Resultat also 340 ist.
2. Wir erwarten, dass Sie die Division als Umkehrung der Multiplikation begreifen, also erkennen, dass $9 \cdot 30$ gleich 270 und $9 \cdot 2$ gleich 18 ist. Resultat: 32.
3. Sie sehen sofort 396.
4. Sie wissen auswendig, dass $15 \cdot 15 = 225$ ist. Daraus folgt sofort 2.25.
5. Sofort $4 \cdot 37$, also 148..
6. Wir erwarten, dass Sie Prozentrechnungen als Multiplikation begreifen. In diesem Fall ist $0.6 \cdot 140$ zu rechnen. Das machen Sie mittels $6 \cdot 140$, was gleich 840 ist. Resultat folglich 84.
7. Besondere Werte der trigonometrischen Funktionen können Sie sofort ermitteln, indem Sie sich mental den Einheitskreis vorstellen, darin den entsprechenden Winkel eintragen und den gefragten Wert mental bestimmen.
8. Sie wissen, dass dies gleich $5 \cdot 90$ ist, also 450.

9. $4^3 = 64$ haben Sie memoriert – als Beispiel einer einfachen dritten Potenz. Daraus schliessen Sie sofort auf 4.

10. Sowohl die Definition von Potenzen mit negativen Exponenten ($10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0.01$) als auch die Bestimmung des Logarithmus in einfachen Fällen ($\log_{10} 10^{-2} = -2$) ist bei ihnen mental automatisiert.

11. Wir wollen, dass Sie Subtraktionen als Umkehrung der Addition begreifen. Also $898 + 100 + 2 + 13 = 1013$, das Resultat ist somit 115.