

Aufnahmeprüfung 2022

Mathematik Teil I – Lösungen

1. a) Mit der binomischen Formel:

$$(1-x)^3 = \binom{3}{0} 1^3 x^0 - \binom{3}{1} 1^{3-1} x^1 + \binom{3}{2} 1^{3-2} x^2 - \binom{3}{3} 1^{3-3} x^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$$

- b) Mit den Potenzgesetzen:

$$\left((4a^2)^{-2} (2a^0)^3 \right)^{-1} = 4^{-2 \cdot -1} a^{2 \cdot -2 \cdot -1} 2^{3 \cdot -1} a^{0 \cdot 3 \cdot -1} = 4^2 a^4 2^{-3} a^0 = 2a^4$$

- c) Brüche und Potenzgesetze:

$$\frac{3^n \left(\frac{1}{3} 3^n - 3^{n-2} \right)}{3^{2n}} = \frac{3^n 3^n \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9} \right)}{3^{2n}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

- d) Brüche, Potenz- und Wurzelgesetze:

$$\frac{(a^{-3}b)^{-2}}{\sqrt{ab^3}} \div \frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[6]{a^5b^5}} = \left(a^{6-\frac{1}{2}} b^{-2-\frac{3}{2}} \right) \div \left(a^{\frac{1}{3}-\frac{5}{6}} b^{\frac{1}{3}-\frac{5}{6}} \right) = a^{\frac{11}{2}} b^{-\frac{7}{2}} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{12}{2}} b^{-\frac{6}{2}} = \frac{a^6}{b^3}$$

- e) Formel beschreibt einen Basiswechsel:

$$\frac{\log_2(512)}{\log_2(8)} = \log_8(512)$$

- f) Trigonometrische Umformungen:

$$\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)} = \sqrt{1 + \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}} = \frac{\sqrt{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

2. a) Doppelbrüche:

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{1}{x - \frac{6}{x-1}} - \frac{1}{x - \frac{2}{x+1}} = \frac{1}{\frac{x(x-1)}{x-1} - \frac{6}{x-1}} - \frac{1}{\frac{x(x+1)}{x+1} - \frac{2}{x+1}} = \frac{1}{\frac{x^2-x-6}{x-1}} - \frac{1}{\frac{x^2+x-2}{x+1}} \\ &= \frac{x-1}{x^2-x-6} - \frac{x+1}{x^2+x-2} = \frac{x-1}{(x-3)(x+2)} - \frac{x+1}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{(x-1)^2 - (x+1)(x-3)}{(x+2)(x-1)(x-3)} = \frac{4}{(x+2)(x-1)(x-3)} \end{aligned}$$

- b) Z.B. mit einer Vorzeichentabelle:

		-2		1		3	x	
(x+2)	-	-	0	+	+	+	+	+
(x-1)	-	-	-	-	0	+	+	+
(x-3)	-	-	-	-	-	0	+	+
Term	-	-	x	+	+	+	x	-

$\Rightarrow x \in (-2, \infty) \setminus [1, 3]$

3. a) Der Definitionsbereich wird durch die Wurzeln bestimmt:

$$2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow D_1 = \left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$$

$$4 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow D_2 = (-\infty, 4]$$

$$\Rightarrow DB = D_1 \cap D_2 = \left[-\frac{1}{2}, 4\right]$$

b)

$$\sqrt{2x+1} = 1 + \sqrt{4-x}$$

$$2x+1 = 1 + 2\sqrt{4-x} + 4 - x$$

$$3x - 4 = 2\sqrt{4-x}$$

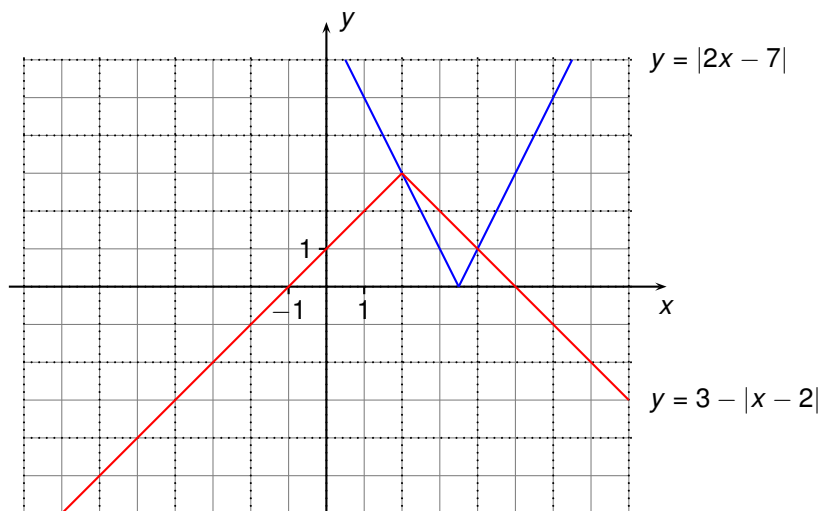
$$9x^2 - 24x + 16 = 16 - 4x$$

$$9x^2 - 20x = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{20}{9}$$

Beide Lösungen befinden sich im Definitionsbereich der Gleichung. Die Kontrolle zeigt, dass $x_1 = 0$ ($\sqrt{1} = 1 + \sqrt{4}$) eine Scheinlösung ist. Die Lösungsmenge lautet somit: $L = \left\{\frac{20}{9}\right\}$.

4. a) Skizze:



b) Fallunterscheidung:

- Fall 1: $2x - 7 \geq 0 \Rightarrow D_1 = [3.5, \infty)$:

$$2x - 7 = 3 - |x - 2|$$

- Fall 1A: $x - 2 \geq 0 \Rightarrow D_{1A} = [3.5, \infty)$:

$$2x - 7 = 3 - x + 2 \Rightarrow x_{1A} = 4$$

- Fall 1B: $x - 2 < 0 \Rightarrow D_{1B} = \{\}$: Keine Lösung!

- Fall 2: $2x - 7 < 0 \Rightarrow D_2 = (-\infty, 3.5)$:

$$-2x + 7 = 3 - |x - 2|$$

- Fall 2A: $x - 2 \geq 0 \Rightarrow D_{2A} = [2, 3.5)$:

$$-2x + 7 = 3 - x + 2 \Rightarrow x_{2A} = 2$$

– Fall 2B: $x - 2 < 0 \Rightarrow D_{1B} = (-\infty, 2)$:

$$-2x + 7 = 3 + x - 2 \Rightarrow x_{2B} = 2$$

Liegt nicht im entsprechenden Definitionsbereich!

Somit hat die Gleichung die Lösungsmenge $L = \{2, 4\}$

5. a) Mit $a = 64$ und $a^p = 512$ folgt $64^p = 512 \Rightarrow p = \frac{\log_2(512)}{\log_2(64)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$. Mit $a = 64$ und $a^q = 256$ folgt $64^q = 256 \Rightarrow q = \frac{\log_2(256)}{\log_2(64)} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

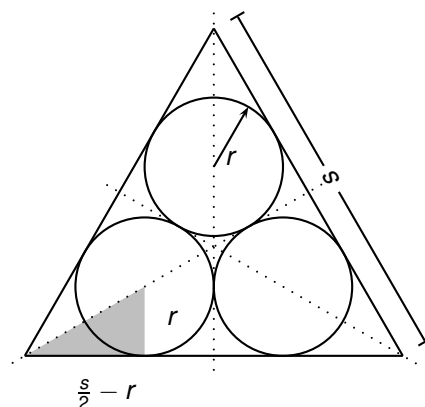
b) Es gilt: $16 = (x^p)^q = x^{pq} = x^2$. Nach x auflösen: $x = \sqrt{16} = 4$.

6. a) Im markierten Dreieck gilt:

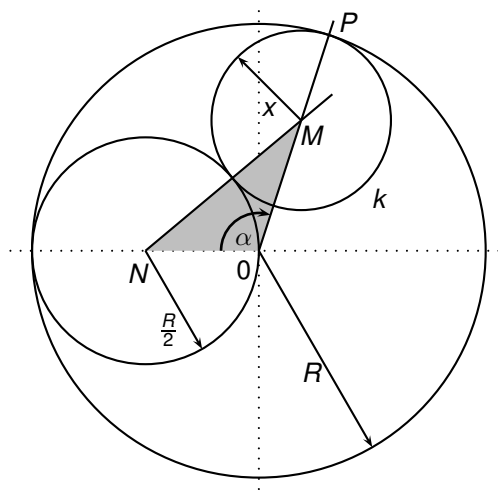
$$\tan(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r}{\frac{s}{2} - r}$$

Nach dem gesuchten Radius auflösen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{r}{\frac{s}{2} - r} \\ \frac{s}{2} - r &= \sqrt{3}r \\ \frac{s}{2} &= r(1 + \sqrt{3}) \\ \Rightarrow r &= \frac{s}{2(1 + \sqrt{3})} = \frac{s(\sqrt{3} - 1)}{4} \end{aligned}$$



b) Skizze:



Im markierten Dreieck liefert der Kosinussatz die Gleichung:

$$\left(\frac{R}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (R - x)^2 - 2 \cdot \frac{R}{2} (R - x) \cos(\alpha)$$

Nach dem gesuchten Radius auflösen:

$$\begin{aligned}\left(\frac{R}{2} + x\right)^2 &= \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (R-x)^2 - 2\frac{R}{2}(R-x)\cos(\alpha) \\ \frac{R^2}{4} + Rx + x^2 &= \frac{R^2}{4} + R^2 - 2Rx + x^2 - R(R-x)\cos(\alpha) \\ x(3R - R\cos(\alpha)) &= R^2(1 - \cos(\alpha)) \\ \Rightarrow x &= R \frac{1 - \cos(\alpha)}{3 - \cos(\alpha)}\end{aligned}$$

7. a) $|\vec{AB}| = |\vec{r}_B - \vec{r}_A| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + 12^2 + (-4)^2} = 13$

b) $\vec{s}_A = \vec{AM}_a = \vec{r}_{M_a} - \vec{r}_A = \frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_C) - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{13}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c) $\vec{AB} \circ \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 + 12 - 12 = 0$

8. a) $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{2}{3}}{-\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}} = \frac{\frac{2}{3}}{-\sqrt{1 - (\frac{2}{3})^2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

b) Ein Produkt ist gleich Null, wenn die einzelnen Faktoren Null sind!

• Erster Faktor:

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

• Zweiter Faktor:

$$(\sin(2\alpha) - 1) = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Die gesuchte Lösungsmenge lautet somit:

$$\Rightarrow L = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3} \right\}$$