

Die Phänomene Muster und Strukturen im Mathematikunterricht als Thema in den Schulpraktischen Studien

Wagenschein-Tagung 30.4.2022

PD Dr. Heike Hagelgans, Jaqueline Simon



Abbildung: Welt der Zahl, Westermann
Braunschweig 2022



Gliederung

- Problemaufriss und Ziel
- Theoretischer Hintergrund: Lehrerprofessionalität, Muster und Strukturen als mathematisches Grundkonzept
- Einblicke in die empirische Studie
- Zusammenfassung und Ausblick



Problemaufriss und Ziel

- Problem in den schulpraktischen Studien:
fachliche Klärung der Unterrichtsinhalte, fachliche Unzulänglichkeiten auch in den schulpraktischen Tätigkeiten
- daher Überlegungen, wie man das verbessern kann



Ziel: verstärkte Beachtung und Klärung der Phänomene



fallbasierte fachdidaktische Entwicklungsprojekte
Studierende – Universitäre MitarbeiterInnen- schulische
MentorInnen

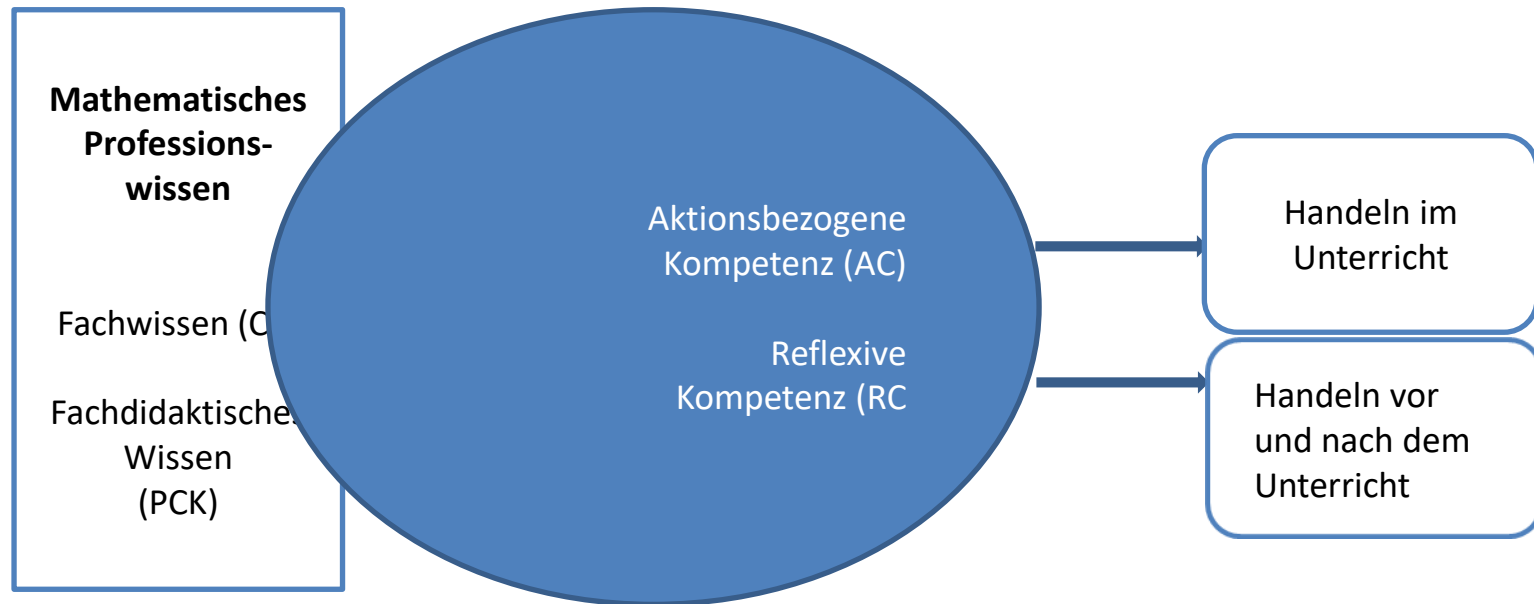


Theoretischer Hintergrund

Professionelle Kompetenz von Lehrkräften

Kognition

Performanz



Vereinfachte Darstellung aus: Jeschke, C., Lindmeier, A. & Heinze, A. (2021). Vom Wissen zum Handeln: vermittelt die Kompetenz zur Unterrichtsreflexion zwischen mathematischem Professionswissen und der Kompetenz zum Handeln im Mathematikunterricht? Eine Mediationsanalyse. *Journal für Mathematikdidaktik*. Band 42 Heft 1. S. 159-186.



Theoretischer Hintergrund

Muster und Strukturen als mathematisches Grundkonzept

- Bildungsstandards Mathematik Primarbereich Deutschland
-> Bereich *Muster und Strukturen*

Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen	<ul style="list-style-type: none">• strukturierte Zahldarstellungen verstehen und nutzen• Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern erkennen, beschreiben und fortsetzen• arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben
Funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen	<ul style="list-style-type: none">• funktionale Beziehungen in Sachaufgaben erkennen, sprachlich beschreiben und lösen• funktionale Beziehungen in Tabellen darstellen und untersuchen• einfache Sachaufgaben zur Proportionalität lösen

Wittmann, E. Ch. & Müller, G.N. (2008). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In G. Walther et al. (Hrsg.), *Bildungsstandards konkret*. (S. 42-65). Berlin: Cornelsen Scriptor



Muster und Strukturen als mathematisches Grundkonzept

Muster und Strukturen – Begriffsklärungen

Ausgangspunkt

Strukturelle Eigenschaften der Mathematik entziehen sich der konkreten Betrachtung. Strukturelle Zusammenhänge können sich jedoch in Mustern zeigen.



Muster sind Regelmäßigkeiten in sichtbaren Phänomenen.
Muster als Türöffner zu mathematischen Strukturen.



Strukturen sind mathematische Eigenschaften und Relationen.
Strukturen bilden die Grundlagen von Mustern.

Steinweg, A.S. (2020). Muster und Strukturen: *Anschlussfähige Mathematik von Anfang an*. In H.-S. Siller, W. Weigel & J.F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020*. (S. 39-46). Münster: WTM.

Akinwunmi, K. & Lüken, M. (2021). Muster und Strukturen: Empirische Forschung zu einem schillernden Inhaltsbereich?! In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Blick auf Schulcurricula Mathematik: Empirische Fundierung? – Tagungsband des AK Grundschule in der GDM*. (S. 9-24) 2021. Bamberg: University of Bamberg Press.



Muster und Strukturen als mathematisches Grundkonzept

Muster und Strukturen – Konsequenzen für die LehrerInnenbildung

Ausgangspunkt

Muster sollen durch die Heranwachsenden beschrieben und mit den dahinter liegenden Strukturen argumentativ begründet und kommuniziert werden.

Konsequenzen für die LehrerInnenbildung

- Das Thema Muster darf nicht nur einseitig methodisch in den Blick genommen werden, sondern muss als Zugang zur Struktur verstanden werden.
- Die Beurteilung von Aufgaben mit Mustern ist zu fördern.
- Die Professionalisierung muss Bewusstheit für diesbezügliche Lerntätigkeiten schaffen.
- *erkennen – sehen, hineindeuten*
- *nutzen – replizieren, fortsetzen, Analogien erkennen, transferieren*
- *beschreiben – mündlich oder schriftlich kommunizieren*
- *begründen – argumentieren, erklären, verallgemeinern*

Steinweg, A.S. (2014). Muster und Strukturen zwischen überall und nirgends. Eine Spurensuche. In A.S.Steinweg (Hrsg.), *10 Jahre Bildungsstandards*. (S. 51-66). Bamberg:ubp.

Steinweg, A.S. (2020). Muster und Strukturen: *Anschlussfähige Mathematik von Anfang an*. In H.-S. Siller, W. Weigel & J.F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020*. (S. 39-46). Münster: WTM.



Die empirische Studie

Teil: Muster- und Strukturkompetenzen von Studierenden

Forschungsmethodische Grundlegung

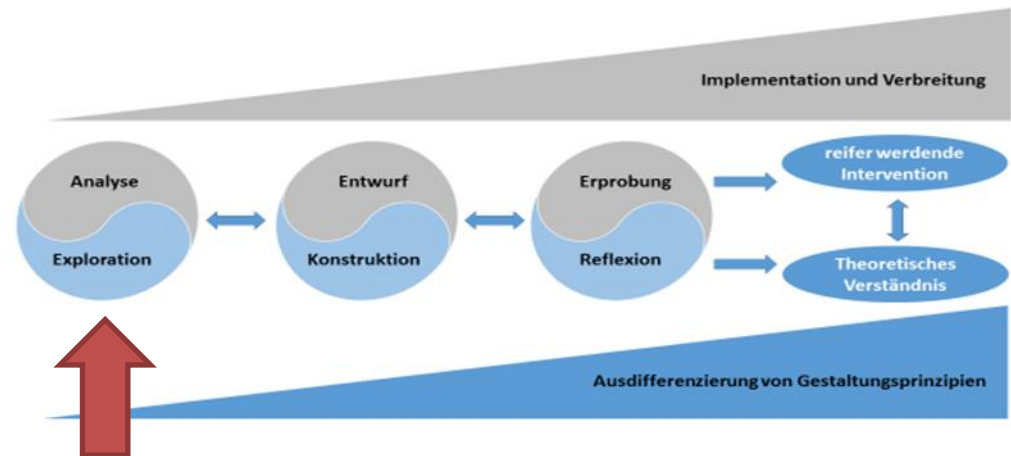
- Fachdidaktische Entwicklungsforschung
- **Iteratives** Verfahren aus theoretischer und praktischer Exploration, Konstruktion und Evaluierung
- Gewinnung von **didaktischen Gestaltungsaussagen** bzw. einer lokalen Lehr-Lern-Theorie
- Generisches Modell:

Abbildung:

Reinmann, G. (2014). Hochschuldidaktik als verlängerter Arm des Managements?

In: Lehren-Lernen-Didaktik:

<http://gabi-reinmann.de/?p=4458> (Abruf 15.9.2015)



Die empirische Studie

Teil: Muster- und Strukturkompetenzen von Studierenden

Forschungsfeld, Datensammlung und Datenauswertung

- Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Lehramt für die Primarstufe im Rahmen der schulpraktischen Ausbildung (Modul Schulpraktikum 1)
- Wintersemester 2021/2022
- N = 63
- Datensammlung: schriftliche Lösungen der Studierenden zu vier Aufgaben aus dem Mathematikunterricht der Primarstufe (Lehrwerk Denken und Rechnen von Westermann und Zahlenbuch von Klett)
- Datenauswertung: deduktiv-induktive Kategorienbildung pro Aufgabe: Phänomen- und Struktursicht mit der Angabe von Häufigkeiten



Die empirische Studie

Muster- und Strukturkompetenzen von Studierenden

Einblick in die Daten und Auswertung der Daten

Aufgabe 1: (Lehrwerk Denken und Rechnen, Westermann Schulbuchverlag Braunschweig)

Bilde ein starkes Päckchen.

$$260 - 4$$

$$270 - 2$$

$$250 - 6$$

$$240 - 8$$



Beschreiben Sie, welche Muster Sie im Päckchen erkennen.

Begründen Sie das Muster (d.h. welche mathematische Struktur steckt hinter dem Muster?)

$-10 - (+2) = -12$ (größter Minuend steht oben)

$a - 10 - (b + 2) = a - b - 12$

260 – 4

270 – 2

250 - 6

240 - 8

Die empirische Studie Muster- und Strukturkompetenzen von Studierenden

Einblick in die Daten und Auswertung der Daten Aufgabe 1: Klärung des Phänomens

Aspekt	Anzahl TN (63)
Muster vollständig richtig erkannt (Verhalten Minuend, Subtrahend, Ergebnis)	41
Muster nur teilweise erkannt (ein oder zwei Aspekte bzgl. Minuend, Subtrahend, Ergebnis fehlen)	14
Muster nur teilweise erkannt und fehlerhaft	2
Muster sehr oberflächlich und falsch beschrieben	1



260 – 4

270 – 2

250 - 6

240 - 8

Die empirische Studie

Muster- und Strukturkompetenzen von Studierenden

Einblick in die Daten und Auswertung der Daten

Aufgabe 1: Klärung der Struktur

Aspekt	Anzahl TN (63)
algebraisch korrekte Darstellung der Struktur	11
algebraisch nicht korrekte Darstellung der Struktur	5
verbale Wiederholung der Aussagen zum Phänomen	15
verbale falsche Aussagen	11
Zahlenbeispiel	1
Benennen der Rechenoperationen	1
Keine Angaben	19



Die empirische Studie Muster- und Strukturkompetenzen von Studierenden

Einblick in die Daten und Auswertung der Daten Aufgabe 1: Klärung der Struktur – Beispiele

- „Addition von 10 Einheiten & Subtraktion von 2. Diese beiden Zahlen addieren und so erhält man die zu addierende Zahl für die Differenz (das Ergebnis).“
- „Hinter dem Muster steckt die Zweierreihe, welche oft beim Abzählen genutzt wird, da diese leicht zu merken ist und sich schnell auswendig lernen lässt. Somit können die Kinder hier nun ihr bekanntes (erlerntes) Wissen auf diese Aufgabe übertragen.“
- „Hier muss verstanden werden, dass die Zahlen in jedem Fall kleiner werden. Das wird durch das Minuszeichen symbolisiert. Vergleicht man die Zahlen der unterschiedlichen Aufgaben, werden diese kleiner und ihre Subtrahenden jeweils um zwei größer, was suggeriert, dass die Endergebnisse immer kleiner werden.“
- „Förderung des Zahl- und Operationsverständnisses“
- „Subtraktion. Zehner wird nicht überschritten“
- „Kombination aus 10er Folge und 2er-Folge. Alle Zahlen sind gerade.“
- $a-b=c$ $(a+10)-(b-2) = c + 12$
 $a + 10 - b - 2 = c + 12 \quad /-12$
 $a-b \quad \quad = c$

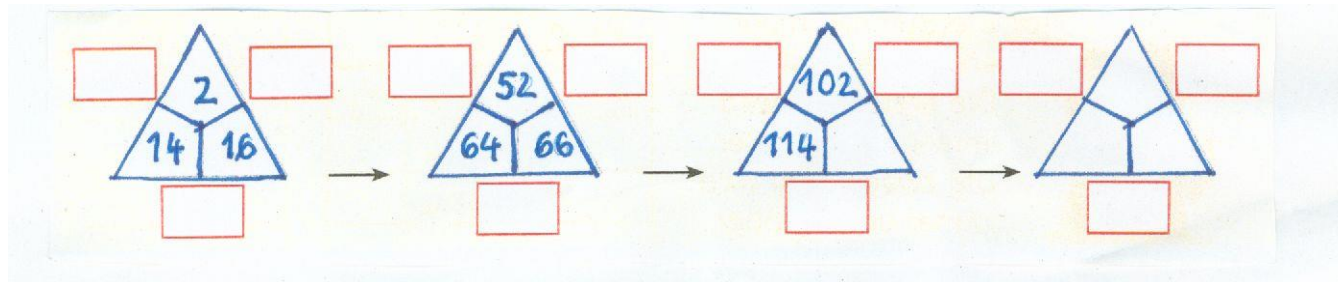


Die empirische Studie Muster- und Strukturkompetenzen von Studierenden

Einblick in die Daten und Auswertung der Daten

Aufgabe 2: (Lehrwerk Denken und Rechnen, Westermann Schulbuchverlag Braunschweig)

Rechne. Erkennst du das Muster? Setze fort.



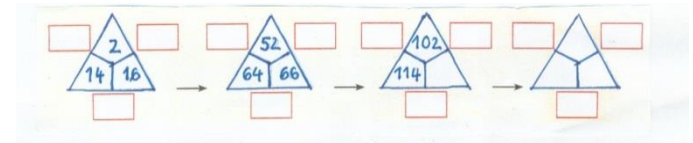
Beschreiben Sie das Muster

Begründen Sie das Muster ...



Die empirische Studie

Muster- und Strukturkompetenzen von Studierenden



Einblick in die Daten und Auswertung der Daten

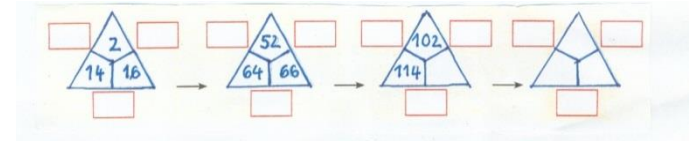
Aufgabe 2: Klärung des Phänomens

Aspekt	Anzahl TN (63)
Jede Innenzahl wird immer um 50 größer.	53
Deshalb wird jede Außenzahl immer um 100 größer.	58
Kein Muster benannt, Rechendreiecke richtig ausgerechnet	2
Falsches Muster beschrieben, richtig ausgerechnet	1
Falsches Muster	2



Die empirische Studie

Muster- und Strukturkompetenzen von Studierenden



Einblick in die Daten und Auswertung der Daten

Aufgabe 2: Klärung der Struktur

Aspekt	Anzahl TN (63)
Korrekte algebraische Struktur	21
Inkorrekte algebraische Struktur	3
Wiederholung des Musters	18
Falsche verbale Aussagen	11
Keine Angabe	10



Die empirische Studie

Muster- und Strukturkompetenzen von Studierenden

Einblick in die Daten und Auswertung der Daten

Aufgabe 3: (Lehrwerk Zahlenbuch, Klett Verlag Stuttgart)

Vergleiche die beiden Aufgaben. Was fällt dir auf?

$4 \cdot 27$	$5 \cdot 23$
$7 \cdot 24$	$3 \cdot 25$

Beschreiben Sie das Muster

Begründen Sie das Muster ...

$$a \cdot (20 + b) = 20a + ab$$

$$b \cdot (20 + a) = 20b + ab$$

$$- \qquad \qquad \qquad 20a - 20b = 20(a-b)$$



Die empirische Studie

Muster- und Strukturkompetenzen von Studierenden

4 · 27 5 · 23

7 · 24 3 · 25

Einblick in die Daten und Auswertung der Daten

Aufgabe 3: Klärung des Phänomens

Aspekt	Anzahl TN (63)
Muster in den beiden Aufgaben korrekt erkannt	37
Falsches Muster für die Aufgaben	13
Unsaubere Beschreibung für das Muster in der Aufgabe	9
Kein Muster für die Aufgaben	4
Korrektes Muster für das Ergebnis der Aufgaben	2
Falsches Muster für das Ergebnis	12
Kein Muster für das Ergebnis	49



Die empirische Studie

Muster- und Strukturkompetenzen von Studierenden

4 · 27 5 · 23

7 · 24 3 · 25

Einblick in die Daten und Auswertung der Daten

Aufgabe 3: Klärung der Struktur

Aspekt	Anzahl TN (63)
Struktur algebraisch richtig	0
Struktur algebraisch teilweise richtig (a (20+b) und b (20+a))	2
Struktur algebraisch falsch	6
Wiederholung des Musters	8
verbal falsche Aussage	32
Keine Angabe	15



Die empirische Studie

Muster- und Strukturkompetenzen von Studierenden

4 · 27 5 · 23

7 · 24 3 · 25

Einblick in die Daten und Auswertung der Daten

Aufgabe 3: Klärung der Struktur – Beispiele für fehlerhafte Angaben

- „Beziehung zwischen Multiplikant und Multiplikator“
- „bestimmte Form des gegensinnigen Veränderens, allerdings ohne Ergebnisgleichheit“
- „Faktorzerlegung Distributivgesetz $a(b+c) = ab + ac$, Kommutativgesetz: $ab = ba$ “
- „Faktoren dürfen in der Reihenfolge vertauscht werden, ohne, dass sich das Ergebnis ändert.“
- „Proportionalität“
- „mathematische Struktur: Tausch-Aufgaben“
- „Produktregel“
- „heuristische Strategien“
- „Dieser Aufgabentyp kann sicher schnell zu falschen Ergebnissen führen, da sich Tauschaufgaben auf den ersten Blick ähnlich sehen. Es handelt sich jedoch um analoge Aufgaben, die schrittweises rechnen (halbschriftlich oder schriftlich) erfordern.“
- „ $abc = ab + ac$
 $cba = cb + ca = cb + ac$ “



Die empirische Studie Muster- und Strukturkompetenzen von Studierenden

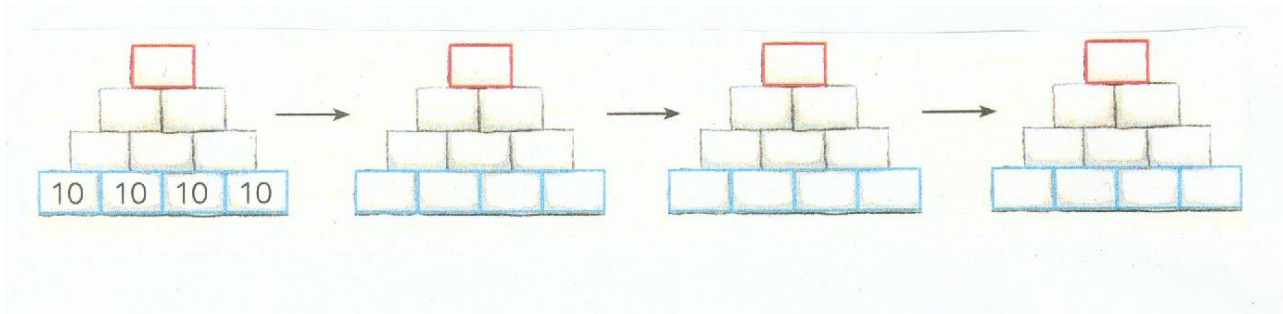
Einblick in die Daten und Auswertung der Daten

Aufgabe 4 (Lehrwerk Denken und Rechnen, Westermann Schulbuchverlag Braunschweig)

Sara beschreibt ihr Muster so:

„Die linke und die rechte Basiszahl werden immer um 2 größer. Die beiden Basiszahlen in der Mitte werden immer um 1 kleiner.“

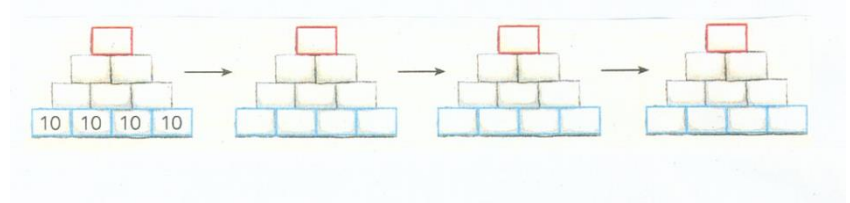
Setze Saras Muster fort und fülle die Zahlenmauern aus.



Beschreiben Sie, welche Muster Sie in und zwischen den Zahlenmauern erkennen.
Begründen Sie die Muster.

$$\begin{array}{cccc}
 & & 8a-2 & \\
 & & 4a-1 & 4a-1 \\
 & 2a+1 & 2a-2 & 2a+1 \\
 a+2 & a-1 & a-1 & a+2
 \end{array}$$



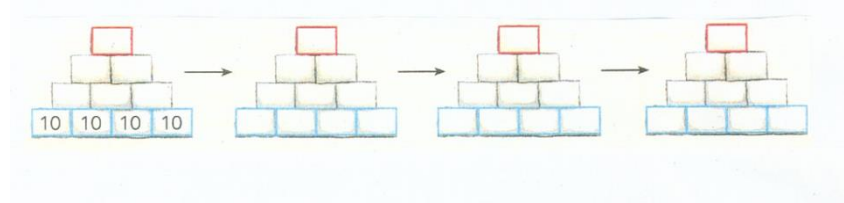


Die empirische Studie Muster- und Strukturkompetenzen von Studierenden

Einblick in die Daten und Auswertung der Daten Aufgabe 4: Klärung des Phänomens

Aspekt	TN (63)
Muster für zweite Zeile korrekt beschrieben	45
Muster für zweite Zeile nicht beschrieben	13
Muster für zweite Zeile falsch	5
Muster für dritte Zeile korrekt beschrieben	7
Muster für dritte Zeile nicht beschrieben	17
Muster für dritte Zeile falsch	2
Muster für dritte Zeile unvollständig(fehlt: identische Zahlen)	37
Muster für vierte Zeile korrekt beschrieben	54
Muster für vierte Zeile nicht beschrieben	7
Muster für vierte Zeile falsch	2



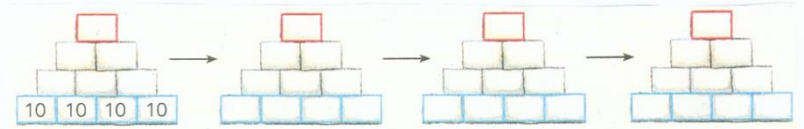


Die empirische Studie Muster- und Strukturkompetenzen von Studierenden

Einblick in die Daten und Auswertung der Daten Aufgabe 4: Klärung der Struktur

Aspekt	TN Anzahl (63)
Angabe der korrekten algebraischen Struktur	16
Angabe einer unvollständig richtigen algebraischen Struktur	1
Angabe einer falschen algebraischen Struktur	10
Wiederholung des Phänomens	2
falsche verbale Angaben	21
Keine Angabe	15





Die empirische Studie Muster- und Strukturkompetenzen von Studierenden

Einblick in die Daten und Auswertung der Daten Aufgabe 4: Klärung der Struktur – fehlerhafte Angaben

- *„Wenn sich der Wert um 1 verringert, summiert er sich an anderer Stelle.“*
- *„gegenseitiges Verändern“*
- *„Verständnis von geraden und ungeraden Zahlen, zwei ungerade Zahlen ergeben zusammen eine gerade Zahl. 1 ungerade Zahl und eine gerade Zahl bleiben ungerade.“*
- *„Aufgaben bauen aufeinander auf.“*
- *„Teile-Ganzes-Prinzip“*
- *„Addition und Subtraktion, systematisches Vorgehen, Erkennen von Strukturen, Problemlösen, halbschriftliches Rechnen.“*



Die empirische Studie

Muster- und Strukturkompetenzen von Studierenden

Erstes Fazit

Aufgabe	Korrekte und vollständige Angabe des Musters	Korrekte algebraische Struktur des Musters
Schönes Päckchen	65%	17%
Rechendreiecke	Innenzahl: 84% Außenzahl: 92%	33%
Multiplikation	59%	0%
Zahlenmauern	Zweite Zeile: 71% Dritte Zeile: 11% Vierte Zeile: 85%	25%



Resümee und Ausblick

- Die empirische Studie hat gezeigt, dass die Lehramtsstudierenden Defizite im mathematischen Fachwissen (CK) haben.
- Das führt vermutlich zu Einbußen im Handeln vor dem Unterricht (RC) und möglicherweise im Handeln im Unterricht in den Schulpraktika (AC).
- Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass den inhaltlichen Phänomenen in den Schulpraktika eine stärkere Aufmerksamkeit gewidmet werden muss.



Unterrichtsversuche als exemplarische fachdidaktische Entwicklungsprojekte

RC vor dem Unterricht: Klärung der fachwissenschaftlichen Grundlagen, wie klärt man fachwissenschaftliche Grundlagen für den Unterricht, fachdidaktische Einordnung und methodische Klärung

AC im Handeln im Unterricht: erste Unterrichtsversuche

RC nach dem Unterricht: Reflexion des Nutzens fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Wissens, Reflexion der Umsetzung

