Fachhochschule Nordwestschweiz
Pädagogische Hochschule

MUSTER

Ergänzungsprüfung für die Zulassung zu den Studiengängen Kindergarten-/Unterstufe bzw. Primarstufe

(gemäss Richtlinien der PH vom 1. September 2017):

Musterarbeit

Fach: Mathematik (mündlich: 15 Minuten)

---

*Die vorliegende Musterprüfung im Fach **Mathematik** überprüft Kompetenzen und Fähigkeiten gemäss den EDK Richtlinien für die Umsetzung der Fachmaturität im Berufsfeld Pädagogik (Stand: 01.08.2019) sowie dem EDK Rahmenlehrplan für Fachmittelschulen (Stand: 01.08.2019). Die Inhalte und Themen entsprechen im Wesentlichen den jeweils geltenden Lehrplänen der Fachmittelschulen des Bildungsraums Nordwestschweiz.*

Hinweise für die mündliche Prüfung

Formale Bedingungen

Die mündliche Prüfung in Mathematik dauert fünfzehn Minuten. Insgesamt werden drei Aufgaben gestellt. Es wird eine Vorbereitungszeit von fünfzehn Minuten gewährt, in denen die ersten beiden Aufgaben bearbeitet werden können unter Nutzung eines Taschenrechners und einer Formelsammlung gemäss dem Beiblatt zu den erlaubten Hilfsmitteln. Die dritte Aufgabe wird erst in der Prüfung selbst gestellt und für ihre Bearbeitung sind keine Hilfsmittel (auch kein Papier und Stift) erlaubt.

Anforderungen

Die drei Aufgaben sind von folgendem Anforderungstyp:

1. **Beweisen, Herleiten, Definieren.** In der ersten Aufgabe wird das Verständnis der theoretischen Begrifflichkeiten und Zusammenhänge getestet. Beispielsweise ist ein Beweis zu führen, eine Formel herzuleiten oder eine Definition zu motivieren. Es ist eine zielgerichtete Vorbereitung auf diese Aufgabe möglich, da eine Frage aus der Liste des Abschnitts „Aufgabe eins“(vgl. unten) gezogen wird.

   Diese Aufgabe können Sie in der Vorbereitungszeit vorbereiten.

2. **Erklären und Diskutieren.** In der zweiten Aufgabe wird eine Problemstellung vorgelegt, die Sie in der Vorbereitungszeit bearbeiten können, oder der Lösungsweg ist bereits notiert (vgl. unten). In der Prüfung erklären Sie das Vorgehen, begründen die Korrektheit des Vorgehens (was zentral für die Bewertung ist) und warum sich das Vorgehen eignet.

   Diese Aufgabe können Sie in der Vorbereitungszeit vorbereiten.

3. **Flexibles Rechnen und Strukturieren.** In der dritten Aufgabe werden die mentalen, sofort abrufbaren Denk- und Rechenfertigkeiten getestet. Beispielsweise sind arithmetische Ausdrücke sofort zu berechnen oder algebraische Terme und Gleichungen geeignet zu strukturieren.

   Diese Aufgabe wird Ihnen erst in der mündlichen Prüfung vorgelegt.

Im Folgenden sind die erste Aufgabe und je zwei Beispiele vom Typ der zweiten und der dritten Aufgabe gegeben.

Aufgabe eins

Bei dieser Aufgabe wird Ihnen genau eine Fragestellung aus der unten stehenden Liste von Herleitungen, Erklärungen und Beweisen vorgelegt. Es wird erwartet, dass Sie die Fragestellung sofort beantworten (sich also tadellos vorbereitet haben), präzis im sprachlichen Ausdruck sind, die Fachbegriffe korrekt verwenden, Ihre Schritte begründen und auch über alternative Herangehensweisen Bescheid wissen.
Bei einigen Aufgaben sind mögliche Zusatzfragen kursiv angegeben. Diese sind exemplarisch und entsprechen nicht den an der Prüfung gestellten Zusatzfragen.

Elementargeometrie

1. Beweisen Sie den Satz von Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ und den Höhensatz $pq = h^2$.
   - *Wie lang ist die Hypotenuse, wenn $a = \sqrt{3}$ und $b = \sqrt{8}$?*
   - *Erläutern Sie, wie man mit Hilfe des Höhensatzes $\sqrt{15}$ konstruieren kann.*

2. Leiten Sie her:
   a) Die Formel für die Raumdiagonale im Würfel: $d = a\sqrt{3}$.
   b) Die Formel für die Höhe im gleichseitigen Dreieck: $h = \frac{1}{2}s \cdot \sqrt{3}$.
   c) Die Formel für den Flächeninhalt im gleichseitigen Dreieck: $A = \frac{1}{4}s^2 \cdot \sqrt{3}$.
   - *Wie lang ist die Kante eines Würfels, dessen Raumdiagonale 1 Meter misst?*
   - *Wie gross ist die Seite eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Flächeninhalt 1 Quadratmeter misst?*

3. Beweisen Sie: Für $n \geq 3$ ist die Innenwinkelsumme im n-Eck gleich $(n-2) \cdot 180°$.
   - *Wie viele Ecken hat ein Vieleck, dessen Innenwinkelsumme* $3060°$ *beträgt?*

Grundlagen der Algebra

4. Erklären Sie den Aufbau des Pascalschen Dreiecks, Beziehungen im Pascalschen Dreieck und die Beziehung zwischen dem Pascalschen Dreieck und den Binomen.
   - *Multiplizieren Sie* $(2x - y)^5$ *aus.*
   - *Auf wie viele Arten kann in einer Gruppe von 20 Personen ein Dreier-Ausschuss gewählt werden?*

5. Die Potenzen x^a werden in der Algebra schrittweise definiert. Zuerst wird x^a für natürliche Exponenten a (ohne 0) definiert, dann für ganze Exponenten a, dann für rationale Exponenten a, schliesslich für relle Exponenten a. Erklären Sie, warum es bei diesem schrittweisen Aufbau sinnvoll ist, x^0 als 1, x^{-n} als $\frac{1}{x^n}$ und $x^{\frac{1}{n}}$ als $\sqrt[n]{x}$ zu definieren.
   - *Schreiben Sie den Ausdruck $\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \sqrt{a}}$ als eine einzige Potenz mit der Basis a.*

Funktionen

6. Erklären Sie, was eine Funktion, eine Wertetabelle, ein Definitionsbereich, ein Wertebereich und ein Graph ist.
   - *Illustrieren Sie Ihre Erklärungen anhand des Beispiels* $f(x) = \sqrt{x-5}$.
7. Erklären Sie, was $\log x$ bedeutet, sowohl aus definitorischer als auch aus anschaulicher Sicht. Erklären Sie zudem den Verlauf der Funktion $f(x) = \log x$.
   - *Wo ist die Nullstelle der Funktion* $f(x) = \log x$*?*
8. Erklären Sie ausgehend von der Definition der linearen Funktion (in der Ebene):
   a) Warum macht es Sinn, den einen Parameter in der Definition als Steigung und den anderen als y-Achsenabschnitt zu bezeichnen?
   b) Wie liest man aus einer Geradengleichung speditiv die Steigung und den y-Achsenabschnitt ab und wie erstellt man mit diesen Angaben den Grafen der Geraden?
   - *Erklären Sie die Begriffe der Steigung, des* y*-Achsenabschnitts einer Geraden und deren Darstellung im Koordinatensystem am Beispiel der Funktion* $y = -\frac{3}{2}x + 5$.
9. Zeigen Sie, dass die x-Koordinate des Scheitelpunkts der quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ durch die Formel $x_s = -\frac{b}{2a}$ bestimmt ist.
   - *Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes der Funktion* $y = -2x^2 + 8x + 3$.

Trigonometrie

10. Zeigen Sie, dass für $0 < x < 90°$ die Definition der trigonometrischen Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ am Einheitskreis mit der Definition von $\sin x$ und $\cos x$ mittels Seitenverhältnissen am rechtwinkligen Dreieck übereinstimmt.
    - *Für welche Winkel gilt* $\cos\alpha = -0.5$, $\sin\beta = 1.2$, $\tan\gamma = 0.3$*?*
11. Zeigen Sie:
    a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
    b) Für $0 < x < 90°$ ist $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und $\tan x = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$ dasselbe.
    - *Bestimmen Sie ohne Taschenrechner* $\cos x$ *und* $\tan x$ *falls* $\sin x = \frac{5}{12}$.
12. Beweisen Sie den Sinussatz $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$.
    - *Berechnen Sie die Seiten und Winkel eines Dreiecks mit* $a = 5$, $b = 8$ *und* $\beta = 40°$.
13. Beweisen Sie den Cosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.
    - *Berechnen Sie den Winkel* γ *für ein Dreieck mit* $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

14. Erklären Sie die Definition der Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+...+(x_n-\bar{x})^2}{n}}$. Warum ist sie so definiert?
    - *Berechnen Sie die Standardabweichung für das Ergebnis eines Würfelexperiments, bei dem die Augenzahl 1 zweimal, die Augenzahl 2 einmal, die Augenzahl 3 dreimal, die Augenzahl 4 zweimal, die Augenzahl 5 keinmal und die Augenzahl 6 zweimal gewürfelt worden sind.*

15. Erläutern Sie die Pfadregeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Produkt- und Additionsregel). Machen Sie insbesondere klar, warum diese stimmen.
    - *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Werfen von 3 Würfeln jeder Würfel eine andere Augenzahl zeigt?*

16. Leiten Sie die folgende Formel aus der Kombinatorik her und geben Sie ein Beispiel an, bei dem die Formel zum Einsatz kommt: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Aufgabe zwei, erstes Beispiel

Beweisen oder widerlegen Sie die jeweilige Aussage.

1. Jedes Rechteck ist ein Parallelogramm.
2. Jedes Parallelogramm ist spiegelsymmetrisch.
3. Verdoppelt man alle Kanten eines Quaders, so verdoppelt sich auch der Inhalt seiner Oberfläche.

Lösungsvorstellung

Wir erwarten, dass Sie mathematisch in elementaren Inhaltsbereichen argumentieren und zwischen dem Beweis einer Aussage und ihrer Widerlegung unterscheiden können.

Zur Bearbeitung der Teilaufgabe 1 müssen Sie wissen, wie ein Rechteck und ein Parallelogramm definiert sind, dass es bei der Benennung von ebenen Figuren um die Anwendung dieser Definitionen geht und dass mit Ober- und Unterbegriffen Inklusionen gemeint sind.

Zur Bearbeitung der Teilaufgabe 2 ist es notwendig, dass Sie ebene Figuren spiegeln können. Sie könnten Figuren mit Zirkel und Lineal spiegeln, Sie schaffen das bei einfachen Figuren aber auch mental und können die Spiegelung daher ad hoc skizzieren.

Bei der Teilaufgabe 3 sind viele Argumentationsweisen vorstellbar. Wichtig ist, dass Sie argumentieren und nicht einfach behaupten.

Aufgabe zwei, zweites Beispiel

Unten sind zwei Lösungswege zur Lösung der Gleichung $(x-1)(x-2) = x-1$ gegeben. Beide Lösungswege sind korrekt.

1. Lösungsweg 1 verwendet die Lösungsformel für quadratische Gleichungen. Diese Formel ist wichtig. Erläutern Sie kurz, wie Sie diese Formel herleiten würden.

2. Begründen Sie die Korrektheit von jedem einzelnen Schritt in Lösungsweg 2.

3. Umschreiben Sie in groben Schritten die Strategie von Lösungsweg 1 und jene von Lösungsweg 2. Erläutern Sie zudem den Anwendungsbereich dieser Strategien.

Lösungsweg 1

$$\begin{aligned}
(x-1)(x-2) &= x-1 && \mid \text{Ausmultiplizieren} \\
x^2 - 3x + 2 &= x-1 && \mid \text{quadr. Gleichung} \\
& && \text{alles auf eine Seite} \\
x^2 - 4x + 3 &= 0 && \mid \text{Lösungsformel} \\
x_{1,2} &= \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}
\end{aligned}$$

$x_1 = 3,\ x_2 = 1$

Lösungsweg 2

$$(x-1)(x-2) = x-1$$

$x - 1 = 0$ oder $x - 2 = 1$

$x_1 = 3,\ x_2 = 1$

Lösungsvorstellung

Wir erwarten, dass Sie Gleichungen nicht nur lösen sondern auch begründen können, warum das, was Sie machen, korrekt ist und sich im jeweiligen Fall auch eignet.

Bei Teilaufgabe 1 ist uns wichtig, dass Sie die Beweisidee von zentralen Aussagen der Schulmathematik kennen. In diesem Fall würde uns der Hinweis auf das quadratische Ergänzen reichen.

Die Bearbeitung von Teilaufgabe 2 bedingt, dass Sie Gleichungen nicht blindlings lösen, sondern über Gleichungen nachdenken und sich klar machen können, was da steht. In diesem Fall müssen Sie beispielsweise über das beidseitige Dividieren sprechen können und über die Voraussetzungen unter denen das erlaubt ist.

Teilaufgabe 3 verlangt, dass Sie in Lösungswegen Strategien erkennen und diese in groben Schritten beschreiben können. Sie sollten zudem aufzeigen können, in welchen Fällen sich eine Strategie eignet und in welchen eher nicht.

Aufgabe drei, erstes Beispiel

a) Berechnen Sie im Kopf. Sie haben je 5 Sekunden Zeit.

   i $42 \cdot 17 - 22 \cdot 17$

   ii $192 : 9$

   iii $427 + 396 - 427$

   iv 1.5^2

   v $4 : \frac{1}{37}$

   vi Wie viel sind 60% von 140?

b) Lösen Sie die folgende Gleichung im Kopf nach x auf. Sie haben 2 Minuten Zeit.
   $12 = (4 - 3x)(x + 8) + 3x(x + 8)$

Lösungsvorstellung

a) Es wird erwartet, dass Sie sattelfest im Kopfrechnen sind. Einerseits müssen Sie Kopfrechnungen (inklusive Prozentrechnungen) sofort ausführen können, zum Beispiel $192 : 9 = 21$ Rest 3, $1.5^2 = 2.25$, $4 : \frac{1}{37} = 148$ und 60% von 140 ist 84. Andererseits müssen Sie flexibel rechnen können, zum Beispiel $42 \cdot 17 - 22 \cdot 17 = 20 \cdot 17 = 340$, $427 + 396 - 427 = 396$.

b) Sie müssen algebraische Gleichungen nicht nur gemäss den Standardverfahren lösen können, sondern auch über einen Struktursinn verfügen. So reduziert sich zum Beispiel die Gleichung $12 = (4-3x)(x+8)+3x(x+8)$ sofort auf $12 = 4(x+8)$ und dies sofort auf $3 = x + 8$, was zu $x = -5$ führt.

Aufgabe drei, zweites Beispiel

a) Berechnen Sie im Kopf. Sie haben je 5 Sekunden Zeit.

   i 2^{10}

   ii $88 + 89 + 90 + 91 + 92$

   iii $\sqrt[3]{64}$

   iv $\log_{10} 0.01$

   v $2 \cdot 21 \cdot 13 + 13 \cdot (-2) \cdot 21$

   vi $13 \cdot 15$

b) Lösen Sie die folgende Gleichung im Kopf nach x auf. Sie haben 2 Minuten Zeit.
   $(x - 11)^3 + 2 = 127$

Lösungsvorstellung

a) Es wird erwartet, dass Sie sattelfest im Kopfrechnen sind, sowohl bei der Verwendung von Standardverfahren als auch beim flexiblen Rechnen, wie bei „Aufgabe drei, erstes Beispiel“ schon festgehalten. Dazu gehört zum Beispiel auch ein sofort abrufbares Wissen um Zweierpotenzen wie 2^{10}, Standardwurzeln wie $\sqrt[3]{64}$ und Zehnerlogarithmen wie $\log_{10} 0.01$.

b) Sie müssen algebraische Gleichungen nicht nur gemäss den Standardverfahren lösen können, sondern auch über einen Struktursinn verfügen. So reduziert sich zum Beispiel die Gleichung $(x - 11)^3 + 2 = 127$ sofort auf $(x - 11)^3 = 125$, also $x - 11 = 5$ und $x = 16$.